



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 10.02.2024
CLASA a XII-a

Problema 1

- a) Calculați: $\int \frac{1}{x^{2024}+x} dx, x > 0$.
- b) Să se calculeze $I = \int_0^{2n+1} \frac{x+\sin(\pi x)}{2n+1+2\sin(\pi x)} dx, n \in \mathbb{N}^*$

Problema 2

Să se arate că:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2024}x + \cos^2x}{\sin^{2024}x + \cos^{2024}x + 1} dx < \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

Problema 3

Fie $k \in (1, +\infty)$ și $G = \left(-\infty, \frac{k^2-1}{k}\right] \cup \left[\frac{k^2+1}{k}, +\infty\right)$.

Se consideră operația $x * y = kxy - k^2(x + y) + k^3 + k$, oricare $x, y \in G$.

- a) Să se demonstreze că $t \in G$ dacă și numai dacă $|t - k| \geq \frac{1}{k}$, $(\forall) k \in (1, +\infty)$.
- b) Arătați că " $*$ " este lege de compoziție pe G .
- c) Studiați existența elementului neutru și a elementelor simetrizabile.

Problema 4

Fie (G, \cdot) un grup și $a, b, c \in G$, care au proprietatea că $a^k b^k = c^k$, pentru orice $k \in \{3, 4, 5\}$. Demonstrați că $ab = c = ba$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 10/2022

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.